CB n$^{\text{o}}$2

Mathématiques - 15 Mai 2025 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 5 exercices tous indépendants.

Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$.

1. On pose $f(x) = \arctan(x)$. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$|f(n+1) - f(n)| \leq \frac{1}{1+n^2}$$

2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^3. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

2. Vérifier que $P^{-1}AP = L$

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}A^nP = L^n$.

   (b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3.

   (c) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

   (d) En déduire, pour $n \geq 2$, les neuf coefficients de L^n. Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.

   (e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = u_n \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = 2u_n + w_n$$

   (a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geq 1$.

   (b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

   (c) Établir que pour tout entier $n \geq 1$ que : $X_n = A^{n-1}X_1$.

   (d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $v_n = 2n(n-1)$ et $w_n = 2n$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 14 & 6 & -10 \\ -3 & 7 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A, c'est à dire l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. (a) Soient $b_1 = (2, 1, 1, 1)$ et $b_2 = (3, 3, 1, 3)$. Calculer $u(b_1)$ et $u(b_2)$.

   (b) Vérifier qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $u(b_1) = \lambda_1 b_1$ et $u(b_2) = \lambda_2 b_2$.

2. (a) Déterminer le vecteur $b_3 = (x, y, z, t)$ tel que $z = 1$ et tel que b_3 appartient au noyau de u.

   (b) En déduire qu'il existe un réel λ_3 tel que $u(b_3) = \lambda_3 b_3$.

3. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (b_1, b_2, b_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Montrer que la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (a) Justifier que $A' - I$ n'est pas inversible.

   (b) En déduire que le noyau de $A' - I$ contient des vecteurs non nuls.

   (c) En déduire qu'il existe un vecteur colonne X non nul tel que $A'X = X$.

   (d) En déduire qu'il existe un vecteur $b_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que $u(b_4) = b_4$.

5. On admet que $\mathcal{B}'' = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   Montrer que la matrice A'' de u dans la base $\mathcal{B}''$ est diagonale.

6. Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $A'' = P^{-1}AP$. On ne demande pas les coefficients de P ou de P^{-1}.

Exercice 4

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n (respectivement Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la n-ième expérience, c'est à dire après le tirage d'une boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k-ième tirage ».

1. (a) Justifier que $X_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. Donner la loi de X_1. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

   (b) Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonction des événements B_1, B_2, R_1 et R_2.

   (c) Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, 3]\!]$. En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

2. (a) Donner sous forme de tableau la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

   (b) Calculer la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer l'événement $[X_n = 1]$ en fonction des événements $B_1, B_2, ..., B_n$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$. De même, calculer $\mathbb{P}(X_n = n + 1)$.

   (c) Établir que pour tout entier $k \in [\![2, n + 1]\!]$, les égalités suivantes :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2}$$

   (d) En déduire que pour tout $k \in [\![2, n + 1]\!]$, une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_n = k - 1)$.

   (e) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n + 1]\!]$.

4. (a) Justifier que les variables aléatoires X_n et Y_n sont de même loi.

   (b) Pour tout entier $n \geq 1$, que vaut $X_n + Y_n$?

   (c) Quel est le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n ?

Exercice 5

On dispose de trois boites A, B et C et d'un nombre illimité d'objets. On répète successivement de façon illimitée l'expérience suivante : on choisit une boite uniformément au hasard et on met un objet dans cette boite. Ainsi, chaque fois qu'un nouvel objet est placé, la probabilité pour qu'il soit placé dans une boite donnée est égale à $\dfrac{1}{3}$.

On note Y le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, deux boites exactement sont occupées par au moins un objet.

On note Z le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, les trois boites contiennent chacune au moins un objet.

On admet que Y et Z sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. (a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y ?

   (b) Déterminer la loi suivie par Y.

   (c) Montrer que $Y - 1$ suit une loi géométrique en précisant son paramètre.

   (d) En déduire l'espérance et la variance de Y

2. (a) Pour tout $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer $\mathbb{P}(Z = \ell \mid Y = k)$.

   (b) En déduire la loi du couple (Y, Z).

3. Montrer que pour tout $\ell \geq 3$, $\mathbb{P}(Z = \ell) = \dfrac{2^{\ell-1} - 2}{3^{\ell-1}}$.

4. Montrer que Z admet une espérance et une variance et les calculer.

5. (a) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

   (b) Y et Z sont-elles indépendantes ?

   (c) En déduire finalement le coefficient de corrélation entre Y et Z.